Vorlesung 6b

Die Normalverteilung

Teil 3

Intermezzo: Dichten von Produktform

(Buch S. 69/70)

Für diskrete Zufallsvariable

war die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Gewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\, \rho_2(a_2).$$

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\ f_2(a_2)\, da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \ \ i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiel:

Die uniforme Verteilung

auf dem Einheitsquadrat

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\, da_1 \;\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\, da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\; da_1\, da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf $[0, 1] \times [0, 1]$.